Campionati Internazionali di Giochi Matematici
Semifinali online 2021
24 aprile 2021
Soluzioni

Ronny Montagnani

27 aprile 2021

Ver: 1.0

Questiti per categorie

- cat C1: quesiti da 1 a 8
- cat C2: quesiti da 5 a 12
- cat L1: quesiti da 7 a 14
- cat L2: quesiti da 9 a 16
- cat GP: quesiti da 7 a 16

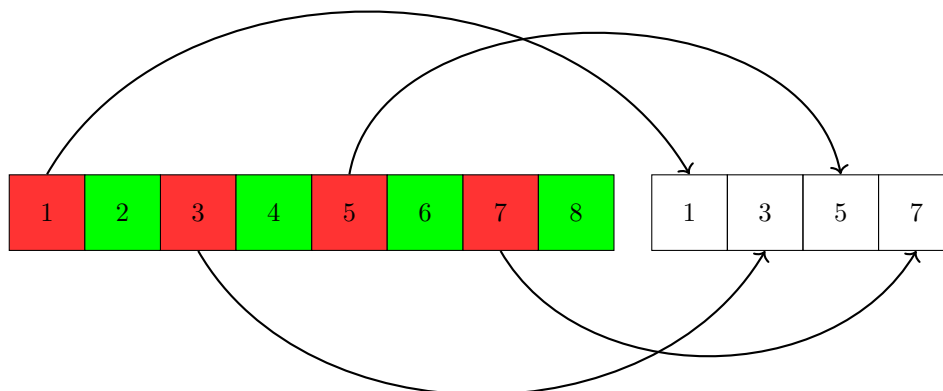
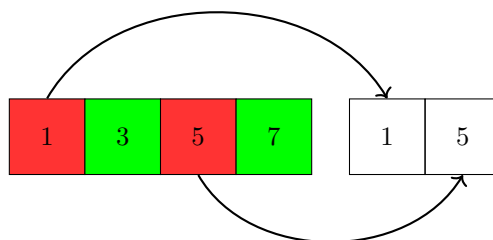
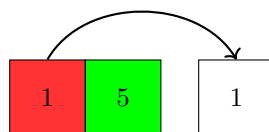
1 Il ballo

Ogni ragazzo formerà 10 coppie, una con ogni ragazza. I ragazzi sono 10 quindi avremo in totale $10 \times 10 =$ **100** coppie diverse.

2 Sempre dispari

L' "1" può essere utilizzata solo come cifra delle unità in quanto è l'unica dispari tra le quattro disponibili.
Come prima cifra, cioè nella posizione delle centinaia, possiamo usare solo "2" e "4" in quanto nella normale scrittura un numero non inizia con una cifra 0. Quindi abbiamo due possibilità.
Come cifra delle decine rimangono disponibili lo "0" e quella non usata per le centinaia. Anche per questa abbiamo quindi due possibilità che ci porta a contare $2 \times 2 =$ **4** numeri possibili.
I 4 numeri sono: 201, 241, 401, 421

3 Rispettate la coda!

Mostriamo in figura la prima coda di 8 persone che si forma all'ingresso degli uffici postali, indicando quali di esse sono rimandate in fondo:

Le persone evidenziate in rosso sono quelle rimandate a fare di nuovo la coda. Quelle invece evidenziate in verde sono quelle che tornato a casa.
Successivamente si formerà una seconda fila con le persone 1,3,5,7:

Come prima, le persone evidenziate in rosso ripeteranno la fila e le altre invece tornano a casa. Si formerà quindi una terza fila con le persone 1 e 5:

La persona 5 andrà quindi finalmente a casa e la **persona 1** sarà quella che lascerà per ultima gli uffici postali.

Si poteva giungere alla soluzione anche considerando che la coda è composta da una numero di persone che è una potenza di 2. Quindi ad ogni controllo di una fila questa si dimezza e continua a rimanere un numero divisibile per 2. Questo fa sì che la persona 1, quando viene mandata in fondo alla fila trova sempre prima di lei un numero pari di persone e quindi sarà sempre una di quelle rimandate in fondo. Per questo sarà lei l'ultima a lasciare gli uffici postali in quanto unica rimasta.

4 Un giorno particolare

Le due risposte che Luca ha dato il 24 e il 25 aprile non possono essere entrambe vere, perciò in un di questi due giorni ha mentito. Quindi il suo compleanno è necessariamente il 24 o il 25 aprile.
Supponiamo che sia il 24: questo significa che il giorno successivo, il 25 aprile, Luca dovrebbe dire la verità ed invece sta mentendo nuovamente dicendo che il suo compleanno è "domani".
Se supponiamo invece che il suo compleanno sia il **25 aprile**, le risposte sono coerenti con il suo comportamento. Infatti il 24 aprile dice la verità rispondendo "domani" e il 25 aprile invece si concede di mentire.

5 Quante facce!

Possiamo notare che ognuno dei 6 cubi che compongono la scultura di Carla ha esattamente 5 facce visibili, cioè tutte meno una. Il numero di facce che Carla dipingerà quindi è $6 \times 5 = \mathbf{30}$.

6 Non è proprio magico

La prima riga della griglia è completa e ci permette di calcolare il prodotto che sappiamo essere uguale per tutte le righe e le colonne.

$$1 \times 8 \times 15 = 120$$

Nella colonna più a sinistra manca un solo numero perciò lo possiamo facilmente calcolare:

$$120 : 20 : 1 = 6$$

1	8	15
6		
20		

Nella seconda riga, quella centrale, il 6 dovrà essere moltiplicato per 20 per ottenere un prodotto di 120. 20 può essere scomposto come 4×5 o 1×20. Il numero 20 però non può essere inserito sotto all'8 in quanto il prodotto dei numeri nella seconda colonna diventerebbe almeno 160. Per lo stesso motivo non può essere inserito sotto al 15. Dobbiamo quindi utilizzare il 4 e il 5 per riempire la seconda riga. Non possiamo inserire il 4 sotto all'8 perchè avremo che il prodotto della seconda colonna conterrebbe almeno 5 fattori 2 (3 dall'8 e 2 dal 4) che sono troppi per il numero 120 (che ne contiene solamente 3).
Quindi inseriamo il numero 4 sotto al 15 e il numero 5 sotto all'8:

1	8	15
6	**5**	4
20		

A questo punto possiamo facilmente completare la griglia, anche se non richiesto. La seconda colonna conterrà il numero 3 ($8 \times 5 = 120$) e la terza colonna il numero 2 ($15 \times 3 = 120$):

1	8	15
6	**5**	4
20	3	2

Il numero inserito al posto di N è il **5**.

7 Si divertono così

I numeri con una sola cifra 1 e tre cifre 7 sono 4, in quanto ci sono 4 posizioni dove inserire la cifra 1. Allo stesso modo i numeri con una sola cifra 7 e tre cifre 1 sono 4.

I numeri con due cifre 1 e due cifre 7 sono 6, in quanto ho 6 modi di scegliere di posizioni su 4 disponibili (nel calcolo combinatorio sono chiamate combinazioni semplici di 2 elementi su 4 e sono calcolate tramite il coefficiente binomiale $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$).
Il totale è $4 + 4 + 6 = \mathbf{14}$.
Visto che si intuisce che i numeri non siamo molti allora si poteva anche procedere elencandoli:

1777

7177

7717

7771

7111

1711

1171

1117

1177

1717

1771

7117

7171

7711

8 Una gara di ginnastica artistica

La media dei voti deriva dalla divisione del totale dei voti dati dai membri della giuria per il numero dei membri. Il valore di 5,625 è quindi il risultato della divisione di due numeri interi. Chiamiamo T il totale dei voti ottenuti e N il numero dei membri.

$$\frac{T}{N} = 5,625$$

rappresentiamo 5,625 come frazione:

$$5,625 = \frac{5625}{1000} = \frac{T}{N}$$

Per trovare il numero minimo di membri dobbiamo trovare il più piccolo valore del denominatore della frazione. Per farlo è sufficiente ridurla ai minimi termini, cioè semplificare i fattori in comune tra numeratore e denominatore.

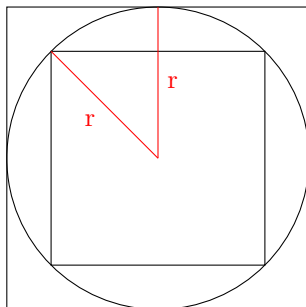
$$5625 = 5^4 \cdot 3^2$$
$$1000 = 5^3 \cdot 2^3$$

I fattori in comune sono 5^3 per cui la frazione si riduce a

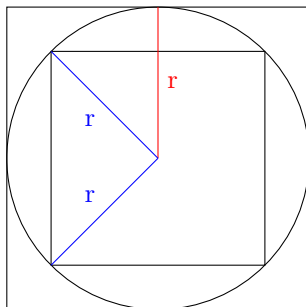
$$\frac{5 \cdot 3^2 \cdot \cancel{5^3}}{2^3 \cdot \cancel{5^3}} = \frac{5 \cdot 9}{8} = \frac{45}{8}$$

Il denominatore minimo è 8. Perciò il numero minimo di membri della giuria è **8**.

9 Inscritto o circoscritto

Riportiamo nella figura la lunghezza r del raggio del cerchio.

La lunghezza del diametro $2r$ corrisponde alla lunghezza del lato del quadrato grande che chiamiamo A. L'area di A è quindi:

$$Area_B = (2r)^2 = 4r^2$$

Costruendo il triangolo rettangolo indicato in blu possiamo calcolare l'area del quadrato più piccolo che chiamiamo B:

L'area di questo triangolo è:

$$\frac{r \cdot r}{2} = \frac{r^2}{2}$$

Osserviamo che l'area di questo triangolo è un quarto dell'area di B quindi vale:

$$Area_B = 4\frac{r^2}{2} = 2r^2$$

Il rapporto tra le due area è:

$$\frac{Area_B}{Area_A} = \frac{2r^2}{4r^2} = \frac{1}{2}$$

10 Le biciclette

Se chiamiamo rispettivamente F_2, F_3 e F_4 le famiglie con 2, 3 o 4 biciclette, abbiamo 2 equazioni che devono essere soddisfatte:

Il numero totale di famiglie è 2000

$$F_2 + F_3 + F_4 = 2000 \tag{1}$$

Il numero totale di biciclette è 5495

$$2F_2 + 3F_3 + 4F_4 = 5495 \tag{2}$$

Il testo ci dice inoltre che 2 categorie di famiglie hanno lo stesso numero, quindi abbiamo 3 possibilità: $F_4 = F_3$, $F_4 = F_2$ oppure $F_3 = F_2$.
Analizziamo i 3 casi:

1) $F_4 = F_3$
le due equazioni diventano:

$$F_2 + 2F_3 = 2000 \tag{3}$$
$$2F_2 + 7F_3 = 5495 \tag{4}$$

Sottraiamo 2 volte la (3) dalla (4):

$$3 \cdot F_3 = 1495$$

F_3 non è divisibile per 3 e quindi la soluzione non essendo un numero intero non è accettabile.

2) $\boldsymbol{F_4 = F_2}$
le due equazioni diventano:

$$2F_2 + F_3 = 2000 \tag{5}$$
$$6F_2 + 3F_3 = 5495 \tag{6}$$

Dalla (5) ricaviamo:

$$3(2F_2 + F_3) = 5495$$
$$2F_2 + F_3 = \frac{5495}{3}$$

Anche in questo caso avremo soluzioni non intere in quanto 5495 non è divisibile per 3.

2) $\boldsymbol{F_3 = F_2}$
le due equazioni diventano:

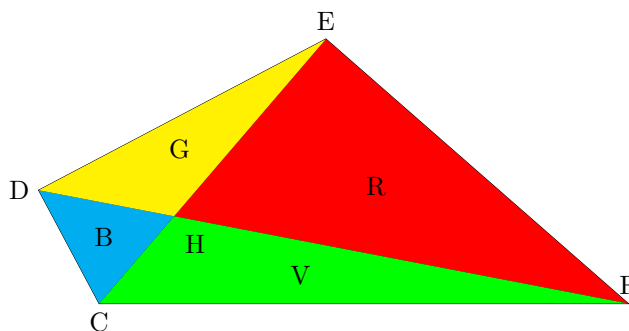
$$2F_2 + F_4 = 2000 \tag{7}$$
$$5F_2 + 4F_4 = 5495 \tag{8}$$

Sottraiamo 4 volte la (7) dalla (8):

$$\begin{aligned} 5F_2 - 8F_2 &= 5495 - 4 \cdot 2000 \\ -3F_2 &= -2505 \\ F_2 &= 835 \end{aligned}$$

In questo caso il risultato per F_2 è accettabile. Il numero di famiglie con tre biciclette, uguale a quello con due biciclette, è **835**.

11 Una bandiera irregolare

Disegnamo la bandiera di Mathlandia aggiungendo i nomi C, D, E, F ai vertici e H al punto di itersezione tra CE e DF.

Riportiamo i dati indicati dal problema:

$$G = B + 2$$
$$V = B + 6$$
$$R = B + 12$$

Possiamo osservare che l'altezza del triangolo giallo rispetto al vertice E coincide con l'altezza del triangolo rosso rispetto allo stesso vertice. Questo significa che il rapporto tra le basi, cioè DH e FH è lo stesso tra le aree G ed R in quanto:

$$G = \frac{DH \cdot h}{2}$$
$$R = \frac{HF \cdot h}{2}$$

dove abbiamo chiamato h la lunghezza dell'altezza dispetto al vertice E.

$$\frac{G}{R} = \frac{DH \cdot h \cdot 2}{2 \cdot HF \cdot h} = \frac{DH}{HF} \tag{1}$$

Analogamente abbiamo che il rapporto tra l'altezza del triangolo blu rispetto al vertice C coincide con l'altezza del triangolo verde rispetto allo stesso vertice. E quindi abbiamo che il rapporto tra le basi corrispondenti è uguale al rapporto tra le aree, cioè:

$$\frac{B}{V} = \frac{DH}{HF} \tag{2}$$

Dalla (1) e dalla (2) ricaviamo:

$$\frac{G}{R} = \frac{DH}{HF} = \frac{B}{V}$$
$$\frac{G}{R} = \frac{B}{V}$$

Esprimiamo tutte le grandezze rispetto all'are B in modo da ottenere un'equazione in una sola variabile:

$$\frac{B+2}{B+12} = \frac{B}{B+6}$$
$$B^2 + 8B + 12 = B^2 + 12B$$
$$12 = 4B$$
$$B = 3$$

Abbiamo ricavato che l'area B cercata è **3** (nell'unità di misura di Mathlandia).

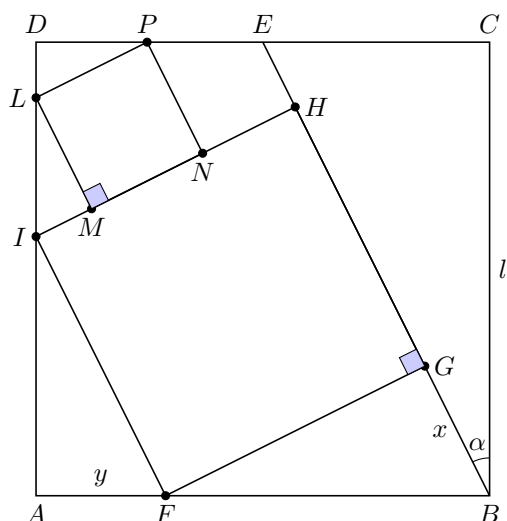
12 Nasi lunghi

Rappresentiamo in tabella i giorni in cui i due ragazzi dicono la verità o dicono bugie:

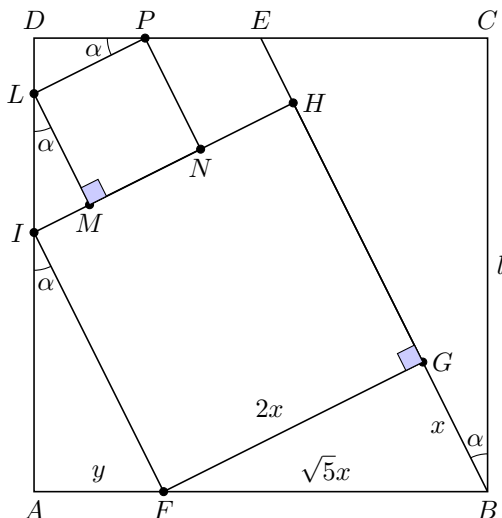
	lunedì	**martedì**	**mercoledì**	**giovedì**	**venerdì**	**sabato**	**domenica**
Jacopo	verità	bugia	bugia	bugia	verità	verità	verità
Liliana	bugia	verità	verità	verità	verità	bugia	bugia

La frase "Ieri ho mentito" può essere detta solo in un giorno in cui il comportamento è diverso da quello precedente. Per esempio nel caso in cui oggi Jacopo dica la verità allora significherebbe che ieri avrebbe mentito. Invece nel caso in cui oggi sia un giorno in cui dice le bugie allora ieri non avrebbe mentito.
Dal punto di vista del comportamento di Jacopo i giorni possibili in cui può aver detto la frase sono due: martedì in quanto dice bugie mentre invece il lunedì dice la verità, oppure il venerdì in quanto dice la verità e il giorno prima invece mente. Analogamente i giorni possibili per Liliana sono il martedì e il sabato. La soluzione del problema è quindi il **martedì** in quanto è l'unico in comune tra i due ragazzi.

13 Un progetto architettonico

Prendiamo la piantina del terreno e diamo un nome ai vari vertici in essa contenuti:

Chiamiamo inoltre l la lunghezza del lato del quadrato (di cui conosciamo la misura), x la lunghezza del segmento GB e y la lunghezza del segmento AF.

Osserviamo che i triangoli contenuti nella figura sono tutti rettangoli in quanto hanno un angolo supplementare ad un angolo del quadrato, come per esempio l'angolo $\widehat{FGB}$.
Indichiamo inoltre con α l'ampiezza dell'angolo $\widehat{CBE}$. Allora il suo complementare $\widehat{GBF}$ vale $90 - \alpha$. L'angolo $\widehat{GFB}$ vale $90 - \widehat{GBF} = 90 - (90 - \alpha) = \alpha$.
Con considerazioni analoghe ricaviamo che tutti i triangoli hanno angoli α e $90 - \alpha$, cioè sono tutti simili al triangolo EBC che sappiamo avere il cateto maggiore (BC) lungo il doppio rispetto al cateto minore (CE) in quanto E è il punto medio del lato del quadrato.
Nel triangolo GFB avremo quindi che il cateto GF avrà lunghezza 2x. Applicando il teorema di Pitagora otteniamo che FB ha lunghezza:

$$\sqrt{x^2 + 4x^2} = \sqrt{5}x$$

Anche nel triangolo AIF avremo che un cateto è doppio dell'altro e quindi AI ha lunghezza doppia a AF, cioè $2y$. Quindi per il teorema di Pitagora avremo che l'ipotenusa IF ha lunghezza $\sqrt{5}y$. Ma l'ipotenusa del triangolo AIF coincide con un lato del quadrato grande che ha lunghezza $2x$, per cui ricaviamo l'equazione:

$$\sqrt{5}y = 2x \tag{1}$$

Inoltre la lunghezza di AF sommata ad FB è quella del lato "l" (24,5) per cui abbiamo una seconda equazione:

$$y + 5\sqrt{5} = l \tag{2}$$

Risolviamo il sistema dato da queste due equazioni:

$$\begin{cases} \sqrt{5}y = 2x \\ y + \sqrt{5}x = l \end{cases}$$

$$y = l - \sqrt{5}x$$
$$2x = \sqrt{5}y$$
$$2x = \sqrt{5} \cdot (l - \sqrt{5}x) = \sqrt{5}l - 5x$$
$$7x = \sqrt{5}l$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{5}}{7}l \\ y = l - \sqrt{5} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{7}l = \dfrac{2}{7}l \end{cases}$$

Abbiamo ricavato che il lato AB è diviso dal punto F in due parti di lunghezza $\frac{2}{7}$ e $\frac{5}{7}$ di l.

Possiamo calcolare il lato FG del quadrato FGHI:

$$\overline{FG} = 2x = 2\frac{\sqrt{5}}{7}l$$

Il segmento AI ha lunghezza $2y = \frac{4}{7}l$ e quindi DI ha lunghezza $\frac{3}{7}l$
Allo stesso modo il segmento DI viene diviso dal punto L in due parti con le stesse proporzioni di $\frac{2}{7}$ e $\frac{5}{7}$, per cui:

$$LI = \frac{5}{7}DI = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{7}l = \frac{15}{49}l$$

LI è l'ipotenusa del triangolo LIM per il quale vale la solita proporzione

$$LI = \frac{\sqrt{5}}{2}LM$$

Da cui ricaviamo LM:

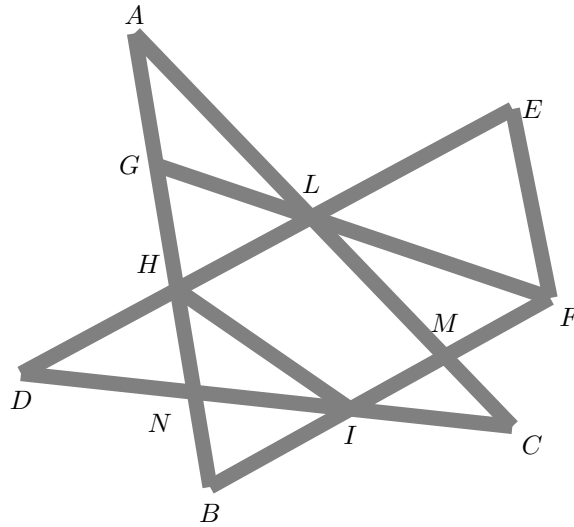
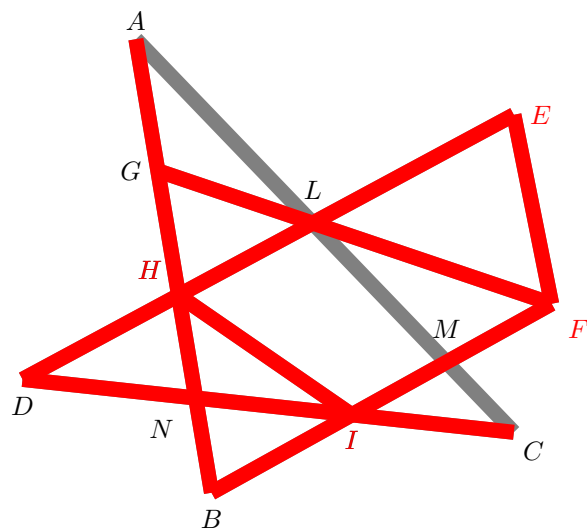
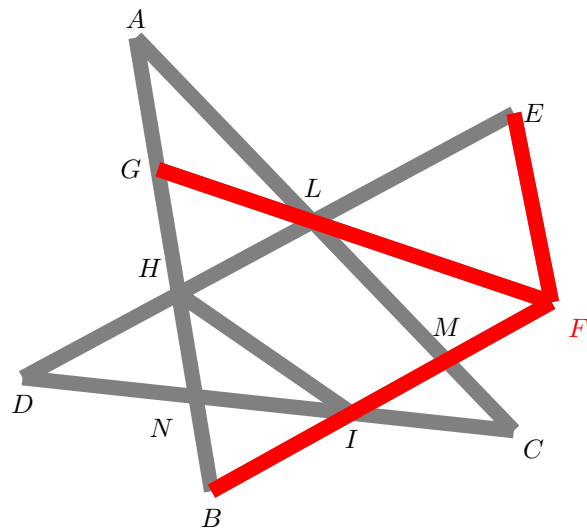
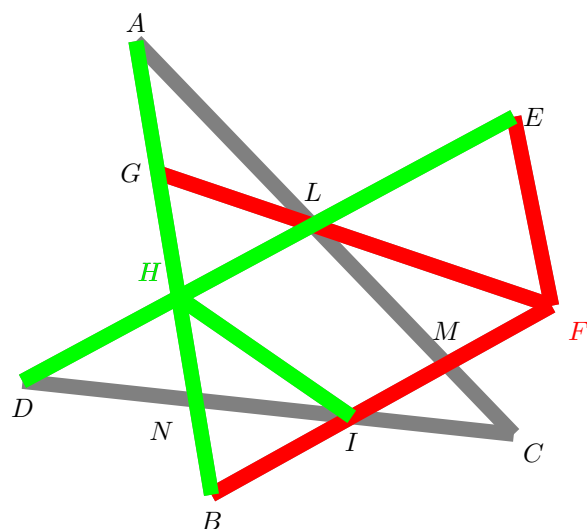
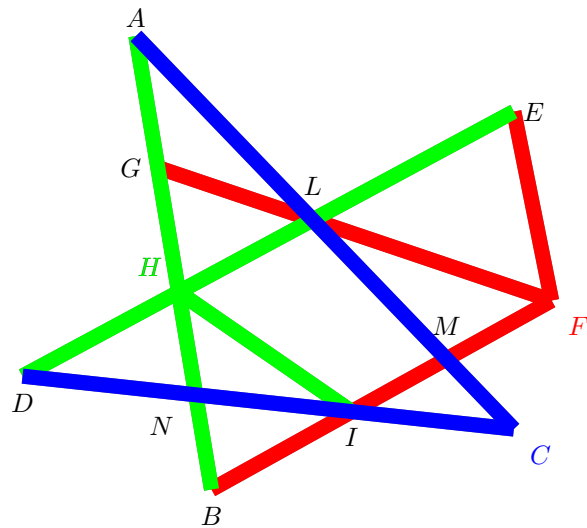
$$LM = \frac{2}{\sqrt{5}}LI = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{15}{49}l = \frac{6\sqrt{5}}{49}l$$

LM è anche il lato del quadrato piccolo LPMN per cui ora abbiamo tutti gli elementi per calcolare le due aree richieste ricordando che $l = 24,5 = \frac{49}{2}$:

$$Area_{GFIH} = \overline{FG}^2 = \left(2\frac{\sqrt{5}}{7}l\right)^2 = \frac{4\cdot 5}{49}l^2 = \frac{\cancel{4}\cdot 5}{\cancel{49}}\,\frac{49^{\cancel{2}}}{\cancel{4}} = 5\cdot 49 = 245$$

$$Area_{LPMN} = \overline{LM}^2 = \left(\frac{6\sqrt{5}}{49}l\right)^2 = \frac{\cancelto{9}{36}\cdot 5}{\cancel{49^2}}\cdot\frac{\cancel{49^2}}{\cancel{4}} = 9\cdot 5 = 45$$

Concludendo la somma del area dei due quadrati è $245 + 45 =$ **290**.

14 Tra musei e labirinti

Possiamo notare che ci deve essere necessariamente un sorvegliante in E oppure in F per poter controllare il corridoio che va da E a F. La stessa cosa vale per il corridoio che collega H con I.
Questi due sorveglianti possono essere sufficienti a controllare tutti i corridoi? Proviamo a vedere cosa succede mettendo 4 sorveglianti nella posizioni E, F, H, I creando quindi un situazione che è uguale o migliore di una qualsiasi di quelle che possiamo ottenere mettendo solo 2 sorveglianti, uno in posizione E o F, e l'altro in posizione H o I. Evidenziamo in rosso i corridoi controllati:

Vediamo che il corridoio che va da A a C non viene controllato. Questo perché manca un sorvegliante in uno dei suoi punti A, L, M e C. Perciò due sorveglianti non possono bastare, il minimo necessario deve essere almeno 3.
Procediamo ora con un tentativo ragionevole: posizioniamo un sorvegliante in F. Evidenziamo in rosso i corridoi controllati:

Per il sorvegliante da posizionare in H, I scegliamo H in quanto in questo modo possiamo controllare il corridoio che arriva ad E (visto che abbiamo messo il primo sorvegliante in F). Otteniamo questa nuova mappa dei corridoi controllati evidenziando in verde quelli controllati dal sorvegliante aggiunto:

Dalla figura si osserva facilmente che posizionando un terzo sorvegliante in C controlliamo anche i due corridoio mancanti, cioè quello da A a C e quello da D a C. Di seguito la figura completa dove abbiamo evidenziato in blu i corridoi controllati dal terzo sorvegliante:

Abbiamo trovato una disposizione con 3 sorveglianti (in F,H e C) che permette di controllare tutti i corridoi e visto che abbiamo dimostrato che 2 sorveglianti non sono sufficienti allora **3** è il numero di sorveglianti necessari.

15 Le freccette

Il problema chiede di calcolare qual è il più grande numero intero che non può essere ottenuto come somma di un multiplo di 14 di un multiplo di 30 e di un multiplo di 105, in quanto questi sono i soli 3 punteggi che Nando ottiene con una freccetta.
In altre parole esiste un intero a partire dal quale lui e tutti i successivi possono essere ottenuti come somma di un multiplo di 14 di un multiplo di 30 e di un multiplo di 105.
Questo tipo di somma di multipli è chiamata combinazione lineare. Per esempio 223 può essere ottenuto tramite combinazione lineare di 14, 30 e 105:

$$223 = a \cdot 14 + b \cdot 30 + c \cdot 105$$

con $a = 2, b = 3, c = 1$.

Analizziamo i due numeri più bassi: 14 e 30. Visto che sono entrambi pari, una loro combinazione lineare darà come risultato sempre un numero pari (sarà la somma di soli numeri pari). Cerchiamo però di capire da quale numero pari, questo e tutti i successivi pari possono essere ottenuti come combinazione lineare di 14 e 30.
Scriviamola in forma generica:

$$a \cdot 14 + b \cdot 30 = a \cdot 2 \cdot 7 + b \cdot 2 \cdot 15 = 2(a \cdot 7 + b \cdot 15)$$

questo ci dice che analizzare i comportamento di 14 e 30 equivale ad analizzare le combinazioni lineari di 7 e 15 per poi moltiplicare per 2 i valori ottenuti.

Se dividiamo 15 per 7 otteniamo 2 con resto 1

$$15 = 2 \times 7 + 1$$

Possiamo quindi osservare che una combinazione lineare che contenga il 15 una sola volta produce come risultato un numero con resto 1 rispetto alla divisione per 7:

$$a \cdot 7 + 1 \cdot 15 = a \cdot 7 + 2 \cdot 7 + 1 = 7(a + 2) + 1$$

Un combinazione del genere permette di produrre tutti i numeri naturali che hanno resto 1 se divisi per 7, maggiori od uguali a 15.
Se utilizziamo una combinazione lineare che contenga 2 volte il numero 15 allora otteniamo numeri con resto 2 rispetto a 7:

$$a \cdot 7 + 2 \cdot 15 + = a \cdot 7 + 4 \cdot 7 + 2 = 7(a + 4) + 2$$

abbiamo cioè la possibilità di avere tutti in naturali che hanno resto 2 se divisi per 7, maggiori uguali a 30.
Procedendo con il ragionamento otteniamo:

$a \cdot 7 + 0 \cdot 15$**:** multipli di 7: resto 0 nella divisione per 7

$a \cdot 7 + 1 \cdot 15$**:** resto 1 nella divisione per 7, maggiori o uguali di 15

$a \cdot 7 + 2 \cdot 15$**:** resto 2 nella divisione per 7, maggiori o uguali di 30

$a \cdot 7 + 3 \cdot 15$**:** resto 3 nella divisione per 7, maggiori o uguali di 45

$a \cdot 7 + 4 \cdot 15$**:** resto 4 nella divisione per 7, maggiori o uguali di 60

$a \cdot 7 + 5 \cdot 15$**:** resto 5 nella divisione per 7, maggiori o uguali di 75

$a \cdot 7 + 6 \cdot 15$**:** resto 6 nella divisione per 7, maggiori o uguali di 90

Dall'ultimo caso capiamo che $90 - 7 = 83$ è sempre un numero che ha resto 6 ma che non può essere ottenuto. Gli altri casi invece ci indicano che tutti numeri maggiori di 83 possono essere ottenuti in quanto abbiamo coperto tutti i possibili resti ottenibili dalla divisione per 7.

Possiamo visualizzare questo risultato tramite questa tabella:

resto 0	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
resto 1			15	22	29	36	43	50	57	64	71	78	85
resto 2					30	37	44	51	58	65	72	79	86
resto 3							45	52	59	66	73	80	87
resto 4									60	67	74	81	88
resto 5											75	82	89
resto 6													90

Le caselle vuote rappresentano i numeri che non possiamo ottenere dalla combinazione lineare di 7 e 15. Possiamo osservare che il più grande numero che manca dalla tabella è 83.
Se scambiamo 7 e 15 otteniamo un ragionamento analogo che ci porta comunque alla conclusione che il più grande numero che non possiamo ottenere è 83 (provare per esercizio).

Riportando quello che abbiamo ottenuto per i numeri 7 e 15 sui loro doppi 14 e 30 abbiamo che il più grande numero pari che non possiamo ottenere è $83 \times 2 = 166$, in altri termini, possiamo ottenere tutti i pari maggiori uguali a 168.

Per ottenere un risultato dispari dobbiamo includere nella somma almeno una volta il punteggio 105, per cui abbiamo delle combinazioni di questo tipo:

$$\underbrace{a \cdot 14 + b \cdot 30}_{\text{tutti i pari} \geq 168} + 105$$

Visto che abbiamo dimostrato che $a \cdot 14 + b \cdot 30$ produce tutti i pari a partire da 168 allora avremo tutti i dispari a partire da $168 + 105 = 273$, mentre invece non possiamo ottenere 271 in quanto sarebbe la somma di 166 e 105.

$$\underbrace{\underbrace{a \cdot 14 + b \cdot 30}_{\text{tutti i pari } \geq 168} + 105}_{\text{tutti i dispari } \geq 273}$$

Riassumendo abbiamo che:

- possiamo ottenere tutti i pari maggiori uguali di 168
- possiamo ottenere tutti i tutti i dispari maggiori uguali di 273
- non possiamo ottenere 271

Quindi il più grande punteggio che Nando non può ottenere è **271**.

16 Numeri periodici

Per prima cosa vediamo come si scrive tramite una frazione un numero periodico della forma $0,\overline{NNNNN}$ con periodo lungo 5 cifre.

$$0,\overline{NNNNN} \times 100000 = NNNNN,\overline{NNNNN}$$
$$0,\overline{NNNNN} \times 100000 - 0,\overline{NNNNN} = NNNNN,\overline{NNNNN} - 0,\overline{NNNNN}$$
$$0,\overline{NNNNN} \times (100000 - 1) = NNNNN$$
$$0,\overline{NNNNN} \times 99999 = NNNNN$$
$$0,\overline{NNNNN} = \frac{NNNNN}{99999}$$

Analizziamo cosa succede per $\frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n} = \frac{NNNNN}{99999} \Rightarrow n = \frac{99999}{NNNNN}$$

Per avere il più piccolo n di questo tipo dobbiamo trovare il più grande valore per NNNNN che divida 99999 in quanto n è un numero naturale. Inoltre NNNNN deve rappresentare un periodo di 5 cifre, cioè non può contenere due cifre consecutive uguali.

Scomponiamo in fattori primi 99999:

$$99999 = 271 \times 41 \times 9$$

Purtroppo solo la divisibilità per 9 è intuibile facilmente. Ricavare anche il fattore 41 richiede di provare tutti i numeri primi precedenti.
Il divisore più grande è 99999 ma non va bene in quanto NNNNN=99999 avrebbe in realtà periodo 1 (sarebbe la sola cifra 9 a ripetersi).
Il successivo divisore più grande è $271 \times 41 = 11111$ che non va bene per lo stesso motivo. Il successivo divisore più grande è $271 \times 9 = 2439$ che è accettabile e ci porta a calcolare

$$n = \frac{99999}{NNNNN} = \frac{\cancel{271} \times 41 \times \cancel{9}}{\cancel{271} \times \cancel{9}} = 41$$

Il più piccolo numero naturale n è **41**.